УДК 004.39 DOI: 10.46972/2076-1546.2022.23.04

І. В. Пулеко, О. В. Андреєв, О. Ф. Дубина, В. О. Чумакевич, А. С. Паламарчук

МОДЕЛЬ РУХУ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ НА ОСНОВІ АЛГЕБРИ ДУАЛЬНИХ КВАТЕРНІОНІВ

Широке використання безпілотних літальних апаратів під час ведення бойових дій актуалізувало проблему стійкого управління ними, особливо коли їх застосовують великими групами. Одним з основних завдань при цьому є забезпечення узгодженого переміщення літальних апаратів групи в просторі. Оптимізацію руху кожного з них у тривимірному просторі доцільно проводити з використанням математичних моделей. Переміщення будь-якого безпілотного літального апарата можна подати як сукупність поступального та обертального рухів, а його швидкість – як комбінацію поступальної та обертальної швидкостей. Раніше ці рухи моделювалися окремо за допомогою системи диференціальних рівнянь чи кватерніонів. У цій статті розроблено математичну модель обертального й поступального рухів літального апарата на основі алгебри дуальних кватерніонів. Дуальні кватерніони, що складаються з восьми скалярів, є компактним зображенням жорстких перетворень у просторі. Тому їх властивості зумовлюють перевагу в ході моделювання руху, оскільки зменшують обсяги обчислень. Так, за допомогою одного дуального кватерніона вдається описати відразу і поступальний, і обертальний рухи, а задля моделювання переміщення використовується операція некомутативного множення дуальних кватерніонів.

У моделі прийнято, що дійсна частина дуального кватерніона визначає орієнтацію безпілотного літального апарата в просторі, а дуальна – його положення в тривимірному просторі. Щоб поєднати літакові системи координат з моделлю, отримано вирази для переходу від літакових кутів орієнтації (крену, рискання і тангажа) до параметрів дуального кватерніона та у зворотному напрямку.

Працездатність запропонованої моделі підтверджено за допомогою розробленого програмного забезпечення моделювання узгодженого руху літальних апаратів. Програмне забезпечення адаптоване для графічного відображення великої кількості літальних апаратів у веббраузерах з підтримкою WebGl.

Ключові слова: *моделювання руху; обертальний та поступальний рух; безпілотні літальні апарати; кватерніони; дуальні кватерніони; алгебра кватерніонів.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Постійне зростання кількості роботизованих засобів та безпілотних літальних апаратів (БпЛА), що застосовуються під час ведення бойових дій, актуалізувало проблему їх стійкого управління. Одним з основних завдань управління групами БпЛА є забезпечення їх узгодженого переміщення в просторі для виконання своїх завдань кожним апаратом окремо. Наприклад, рух у вигляді розгорнутого строю БпЛА, вибір цілей для ураження чи розподіл завдань у разі протидії системі протиповітряної оборони. Оптимізацію переміщень (руху) кожного БпЛА групи в просторі доцільно проводити з використанням математичних моделей, що дозволять описати як рух безпосередньо, так і деякі елементи взаємодії між літальними апаратами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У класичній теорії кінематики і динаміки [1] кінематичні рівняння, подані в напрямних косинусах, є системою дев'яти лінійних скалярних рівнянь, що відповідають шести зв'язкам, які є умовою ортогональності. Рівняння в кутах Ейлера є системою трьох незалежних лінійних рівнянь, що мають одну особливу точку, у якій система вироджується. Динаміка ж описується диференціальними рівняннями руху.

Альтернативою визначення положення динамічного об'єкта є кватерніонні рівняння, які є системою чотирьох лінійних рівнянь, що не вироджуються та відповідають одному рівнянню зв'язку. Подання ортогональних перетворень координат у вигляді добутку кватерніонів дозволяє виконувати моделювання довільного руху з меншими обчислювальними витратами [2, 3]. Але недоліком цієї моделі є те, що кожен вид руху (поступальний і обертальний) буде моделюватися окремо й поєднуватимуться вони в кожній точці переміщення.

Для усунення цього недоліку авторами запропоновано під час моделювання рухів БпЛА застосувати алгебру дуальних кватерніонів. У механіці їх використовують як систему числення для подання жорстких перетворень у тривимірних координатах [4, 5]. Завдяки наявній власній розмірності дуальний кватерніон (на відміну від кватерніона з розмірністю 4) дозволяє описати як положення об'єкта в просторі, так і його орієнтацію.

Подібно до того, як обертання в тривимірному просторі можуть бути описані кватерніонами одиничної довжини, жорсткі рухи в тривимірному просторі можуть бути подані дуальними кватерніонами одиничної довжини. Цей факт використовується в теоретичній кінематиці [6], а також у додатках до тривимірної комп'ютерної графіки, робототехніки та комп'ютерного зору [7]. Приклад подібного моделювання наведено в [12].

Формулювання завдання дослідження. Метою цієї статті є розробка математичних моделей руху БпЛА на основі алгебри дуальних кватерніонів.

Виклад основного матеріалу. Приймемо основні обмеження і допущення. Будемо розглядати БпЛА як «тверде тіло», що є сукупністю матеріальних точок жорстко зв'язаних між собою. У разі руху відстань між точками і центром мас не змінюється, а траєкторія динамічного об'єкта може бути описана як траєкторія руху центра мас.

Рух будь-якого типу БпЛА можна подати як сукупність поступального та обертального рухів (динаміка й кінематика). Оскільки обертання, складене з переміщенням, є також жорстким перетворенням, то будь-яке переміщення жорсткого об'єкта в 3D-просторі може бути описане жорстким перетворенням. Тоді швидкість динамічного об'єкта також складається з поступальної та обертальної швидкостей.

Оскільки дуальні кватерніони ще не набули широкого поширення, то наведемо основні положення алгебри бікватерніонів, що будуть використані для розробки моделей.

У математиці подвійні кватерніони – це 8-мірна реальна алгебра, ізоморфна тензорному добутку кватерніонів та подвійних чисел. Отже, вони можуть бути побудовані так само, як і кватерніони, за винятком використання подвійних чисел замість реальних чисел як коефіцієнтів [9].

Бікватерніони можна описати як множини чисел у такій формі: «$w + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$», де w, x, y, z – це ті чи інші «спеціальні комплексні числа» [9]. Інший спосіб їх введення (процедура Келі – Діксона): це гіперкомплексні числа виду «$a + I \cdot b$», де a, b – будь-які кватерніони, а I – уявна одиниця розширення. Як гіперкомплексне число бікватерніон має розмірність 8. Відомі три різні види бікватерніонів залежно від того, якого типу комплексні числа покладені в основу цього подання (інакше кажучи, які властивості операції множення для числа «I» розширюються) [9]:

еліптичні (ординарні), для яких $I^2 = -1$;

параболічні (дуальні), для яких $I^2 = 0$;

гіперболічні (подвійні), для яких $I^2 = +1$.

Інколи бікватерніон також називають ще комплексним кватерніоном, у цьому разі його подають у вигляді кватерніона, кожен компонент якого є подвійне (дуальне) число (не плутати з комплексним). Дуальне число $A = a_1 + \ell a_2$, де a_1 і a_2 – дійсні числа, а ℓ – символ (комплексність) Кліффорда, що володіє властивістю $\ell^2 = 0$.

Оскільки стаття присвячена моделюванню узгодженого руху БпЛА, то в ній використовуються дуальні кватерніони, що в англомовній літературі отримали назву «Dual Quaternion» [2].

Дуальний кватерніон можна подати у вигляді двох кватерніонів (тут і далі переважно будемо дотримуватися позначень, наведених у [12]):

$$\boldsymbol{D} = \mathbf{q}_1 + \ell \mathbf{q}_2, \tag{1}$$

де $\mathbf{q}_1$ і $\mathbf{q}_2$ є двома кватерніонами, що мають математичний оператор із властивістю $\ell^2 = 0$.

Можливий також інший вигляд цього запису:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де $\mathbf{q}_1$ – дійсна частина, а $\mathbf{q}_2$ – дуальна частина.

Для моделювання динамічних систем можна прийняти, що $\mathbf{q}_1$ визначає орієнтацію БпЛА в просторі, а $\mathbf{q}_2$ – його положення.

Для дуального кватерніона $\boldsymbol{D} = \mathbf{q}_1 + \ell \mathbf{q}_2$ є кілька спряжень, які використовуються залежно від необхідних операцій, наприклад, спряження, отримане шляхом застосування спряженого кватерніона до кожного кватерніона, який складає дуальний кватерніон:

$$\boldsymbol{D}^* = \mathbf{q}^*{}_1 + \ell \mathbf{q}^*{}_2. \tag{3}$$

Скалярними характеристиками дуального кватерніона є норма та модуль.

Нормою дуального кватерніона $\boldsymbol{D}$ є дуальне число, яке визначають у такий спосіб:

$$\|\boldsymbol{D}\| = \|q_1\| + \ell\left(q_{1_0} q_{2_0} + q_1^T q_2\right). \tag{4}$$

Модуль дуального кватерніона – також дуальне число:

$$\left|\tilde{\boldsymbol{D}}\right| = \left|q_1\right| + \ell\,\frac{q_{1_0} q_{2_0} + q_1^T q_2}{\left|q_1\right|}\,. \qquad (5)$$

Основні операції роботи з дуальними кватерніонами подібні до простих кватерніонів.

Додавання і віднімання дуальних кватерніонів комутативне (складові можна міняти місцями):

$$\boldsymbol{D} \pm \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \pm \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_2 \pm \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Множення дійсного числа на дуальний кватерніон:

$$\alpha\,\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \alpha\,\mathbf{q}_1 \\ \alpha\,\mathbf{q}_2 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Множення дуальних кватерніонів некомутативне (у разі зміни порядку співмножників результат бікватерніонного множення різний):

$$\boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Ця операція є однією з головних у моделюванні за допомогою дуальних кватерніонів і несе в собі основний фізичний зміст, а саме результатом бікватерніонного множення є операція додавання поворотів і лінійних переміщень двох дуальних кватерніонів.

Обернений дуальний кватерніон обчислюється в такий спосіб:

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{D^*}{\left\|D\right\|^2}\,. \qquad (9)$$

Якщо недуальна частина дуального кватерніона $\boldsymbol{D}$ має нульову норму, то D не має оберненого дуального кватерніона.

Далі у викладенні дуальні кватерніони, що описують обертання, переміщення та/або гвинтові рухи, а також точки та прямі, подаємо за допомогою унітарних дуальних кватерніонів, тобто подвійних кватерніонів із нормою (4), рівною 1.

Для практичного моделювання дуальний кватерніон будемо розглядати як два кватерніони (2).

Орієнтацію БпЛА в просторі визначатимемо за допомогою так званих літакових кутів: рискання ψ, тангажа ϑ і крену γ, – які задають у базовій і зв’язаній системі координат.

За базову систему координат візьмемо таку:

початок системи координат (точка O_0) розташований у точці початку руху БпЛА;

вісь O_0X_g спрямована на північ по дотичній місцевого меридіана;

вісь O_0Y_g спрямована вертикально вгору і протилежна до напрямку вектора сили тяжіння;

вісь O_0Z_g доповнює систему до правої та спрямована праворуч на схід.

Зв'язана система координат стосується безпосередньо БпЛА:

початок системи координат (точка O) розташований у точці центра мас БпЛА;

вісь OX спрямована вперед, до передньої точки БпЛА;

вісь OY спрямована вертикально вгору і перпендикулярна горизонтальній площині об'єкта;

вісь OZ доповнює систему до правої.

Тоді положення БпЛА в просторі задається радіусом-вектором початку (точка O) зв'язаної системи координат відносно нерухомої базової системи координат. Орієнтація зв'язаної системи координат щодо базової визначається трьома послідовними поворотами на:

кут рискання ψ – поворот навколо осі OY,

кут тангажа ϑ – поворот навколо осі OZ,

кут крену γ – поворот навколо осі OX.

Для початкового визначення дуального кватерніона необхідно задати його дійсну й уявну частини. Орієнтація і стан об'єкта задається щодо базової системи координат за допомогою кутів орієнтації ψ, ϑ, γ і вектора положення центра мас $r = \left(r_x, r_y, r_z\right)^T$.

Дійсну частину можна задати за допомогою формули

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} cos\frac{\psi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - sin\frac{\psi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\gamma}{2} \\ cos\frac{\psi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\gamma}{2} + sin\frac{\psi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \\ cos\frac{\psi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\gamma}{2} + sin\frac{\psi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\gamma}{2} \\ cos\frac{\psi}{2}sin\frac{\vartheta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - sin\frac{\psi}{2}cos\frac{\vartheta}{2}sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Потрібно звернути увагу на те, що, якщо послідовність поворотів інша, вирази будуть теж іншими.

Дуальна частина визначається за таким виразом:

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \otimes \mathbf{q}_1. \tag{11}$$

Обчислити кути орієнтації можна з дійсної частини дуального кватерніона $\mathbf{q}_1$:

$$\psi = arctan\frac{2\left(q_0q_2 - q_1q_3\right)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}, \quad \vartheta = arcsin\left(2\left(q_1q_2 + q_0q_3\right)\right),$$
$$\gamma = arctan\frac{2\left(q_0q_1 - q_2q_3\right)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}. \tag{12}$$

А положення БпЛА визначається за виразом

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1^{-1}, \tag{13}$$

у результаті отримуємо вектор у кватерніонній формі $\mathbf{r} = \left(0, r_x, r_y, r_z\right)^T$.

Задамо поворот і переміщення вектора дуальним кватерніоном. Для введених $O_0 X_g Y_g Z_g$ – нерухомої базової та $OXYZ$ – зв'язаної системи координат БпЛА орієнтацію і його положення відносно базової системи координат можна задати дуальним кватерніоном $\boldsymbol{D}$ [12]. Якщо заданий вектор $\mathbf{r}$ у зв'язаній системі координат, то можна отримати вектор $\mathbf{r}_0$ у базовій системі координат за допомогою формули

$$\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{D} \otimes \mathbf{r} \otimes \boldsymbol{D}^{-1}, \tag{14}$$

і в зворотному напрямку

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{D}^{-1} \otimes \mathbf{r}_0 \otimes \boldsymbol{D}, \tag{15}$$

де $\mathbf{r} = \left(1, 0, 0, 0, 0, r_x, r_y, r_z\right)$ – вектор у біквватерніонній формі.

Для перевірки можливостей моделювання руху БпЛА було розроблено вебдодаток із використанням JavaScript-бібліотеки роботи з бікватерніонами [12]. Автори щиро вдячні Сапожнику Д. О. за допомогу в адаптації програмного коду та розробку графічних елементів (рис. 1).

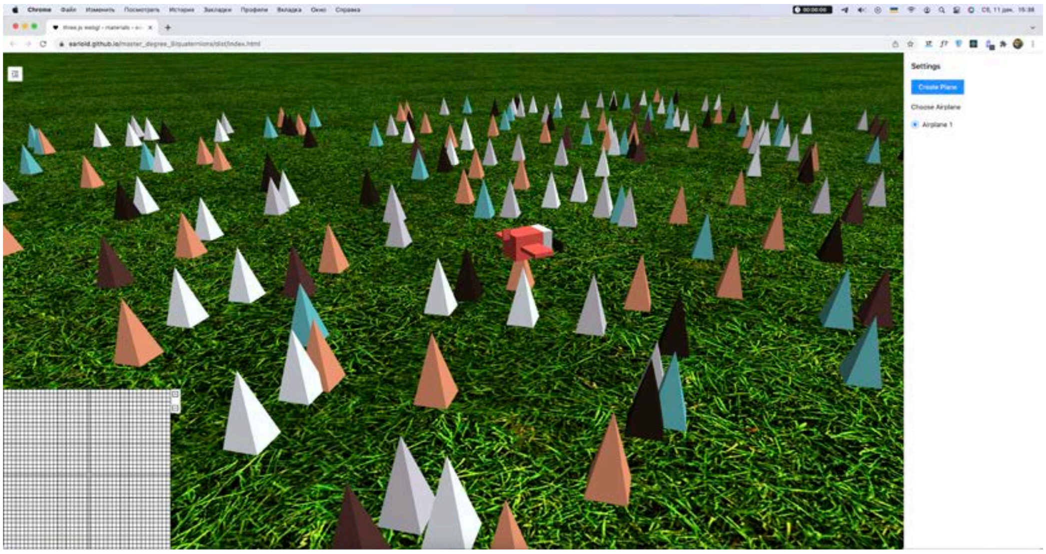

Рис. 1. Графічний інтерфейс користувача вебдодатка моделювання руху БпЛА

Вебдодаток підтримується основними браузерами з WebGl та дозволяє:

моделювати поступальний та обертальний рухи БпЛА за допомогою дуальних кватерніонів;

моделювати довільну кількість БпЛА літакового типу (обмежується лише можливість видимості на екрані);

моделювати зону радіовидимості БпЛА як у вигляді кулі (рис. 2), так і від гостронаправлених антен;

Рис. 2. Зона радіовидимості БпЛА у вигляді кулі

моделювати спільний політ декількох БпЛА з відслідковуванням один одного за допомогою дуальних кватерніонів (рис. 3).

Рис. 3. Спільний політ двох БпЛА

Висновки. Розроблено модель руху БпЛА на основі алгебри дуальних кватерніонів, яка дозволяє одночасно моделювати обертальний та поступальний рухи.

Розроблено вебдодаток, призначений для дослідження руху і вирішення прикладного завдання зі встановлення зв'язку між БпЛА. Програмна реалізація адаптована для вебдодатків, що значно економить виділені ресурси для роботи інших додатків, порівняно з традиційними методами моделювання переміщення 3D-об'єктів, та надає широкі можливості адаптації рішення під різні вхідні параметри. Використання теорії дуальних кватерніонів забезпечує надійність та можливість розширення функціоналу вебсистеми, адаптованого до майбутніх потреб у різних галузях.

Особливо великий потенціал реалізація моделей має в управлінні групами БпЛА та побудові мереж типу Flying Ad-Hoc Networks (FANETs).

СПИСОК БІБЛІОГРАФІЧНИХ ПОСИЛАНЬ

1. Kenzo Nonami, Farid Kendoul, Satoshi Suzuki, Wei Wang, Daisuke Nakazawa. Autonomous Flying Robots. Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles. Springer: Tokyo; London; New York, 2010. 348 p.

2. Пулеко І. В. Математична модель динаміки рухливих об’єктів на основі кватерніонів // Технічна інженерія. Житомир : Держ. ун-т «Житомирська політехніка». 2019. № 2 (84). С. 109–114. DOI: https://doi.org/10.26642/ten-2019-2(84)-109-114

3. Puleko I., Chumakevych V., Ptashnyk V., Misin A. Application of theory of functional stability for information technology of unmanned aerial group control // CEUR Workshop Proceedingsthis link is disabled. 2022. Vol. 3109. P. 1–7.

4. Neil T. Dantam. Practical Exponential Coordinates using Implicit Dual Quaternions // International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR). 2018. P. 639–655. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44051-0_37

5. Murat Bekar, Yusuf Yaylı. Kinematics of Dual Quaternion Involution Matrices // SDU Journal of Science (E-Journal). 2016. № 11 (2). P. 121–132.

6. Leclercq G., Lefèvre P. and Blohm G. 3D kinematics using dual quaternions: theory and applications in neuroscience // Frontiers in Behavioral Neuroscience, 2013. № 7. https://doi.org/10.3389/fnbeh.2013.00007

7. Kenwright Ben. Dual-Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics and Beyond. URL: https://xbdev.net/misc_demos/demos/dual_quaternions_beyond/paper.pdf (last accessed: 24.11. 2022).

8. Li Z., Schröcker H.-P., Scharler D. A Complete Characterization of Bounded Motion Polynomials Admitting a Factorization with Linear Factors. URL: https://arxiv.org/pdf/2209.02306.pdf (last accessed: 24.11. 2022).

9. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної. Одеса. Вид-во БМВ, 2014. 284 с.

10. Гордеев В. Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Киев : Изд-во "Сталь", 2016. 316 с.

11. Bruno Vilhena Adorno. Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra. Part I: Fundamentals. 2017. 47 p. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01478225 (last accessed: 10.12. 2022).

12. Ахрамович Сергей. Бикватернионы. URL: https://habr.com/ru/post/436210/ (дата обращения: 11.12.2022).

Стаття надійшла до редакції 20.12.2022.

REFERENCES

1. Kenzo Nonami, Farid Kendoul, Satoshi Suzuki, Wei Wang, & Daisuke Nakazawa. (2010). *Autonomous Flying Robots. Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles.* Springer: Tokyo; London; New York.

2. Puleko, I. V. (2019). Matematychna model dynamiky rukhlyvykh ob’iektiv na osnovi kvaternioniv [Mathematical Model of Dynamics of Moving Objects Based on Quaternions]. *Tekhnichna inzheneriia [Technical Engineering], 2* (84), 109–114. Zhytomyr: State University "Zhytomyr polytechnic". https://doi.org/10.26642/ten-2019-2(84)-109-114 [in Ukrainian].

3. Puleko, I., Chumakevych, V., Ptashnyk, V., & Misin, A. (2022). Application of theory of functional stability for information technology of unmanned aerial group control. *CEUR Workshop Proceedingsthis link is disabled, 3109,* 1–7.

4. Neil T. Dantam. (2018). Practical Exponential Coordinates using Implicit Dual Quaternions. *International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR),* 639–655. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44051-0_37

5. Murat Bekar, & Yusuf Yaylı. (2016). Kinematics of Dual Quaternion Involution Matrices. *SDU Journal of Science (E-Journal), 11* (2), 121–132.

6. Leclercq, G., Lefèvre, P., & Blohm, G. (2013). 3D kinematics using dual quaternions: theory and applications in neuroscience. *Frontiers in Behavioral Neuroscience, 7.* https://doi.org/10.3389/fnbeh.2013.00007

7. Kenwright Ben. (n.d.). *Dual-Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics and Beyond.* Retrieved from https://xbdev.net/misc_demos/demos/dual_quaternions_beyond/paper.pdf

8. Li, Z., Schröcker, H.-P., & Scharler, D. (n.d.). *A Complete Characterization of Bounded Motion Polynomials Admitting a Factorization with Linear Factors.* Retrieved from https://arxiv.org/pdf/2209.02306.pdf

9. Shvets, V. T. (2014). *Vyshcha matematyka: teoriia funktsii kompleksnoi zminnoi [Higher mathematics: the theory of functions of a complex variable]*. Odesa [in Ukrainian].

10. Gordeev, V. N. (2016). *Kvaterniony i bikvaterniony s prilozheniiami v geometrii i mekhanike [Quaternions and biquaternions with applications in geometry and mechanics]*. Kyiv [in Russian].

11. Bruno Vilhena Adorno. (2017). *Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra. Part I: Fundamentals.* Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01478225 (last accessed: 10.12. 2022).

12. Akhramovich, S. (2019). *Bikvaterniony [Biquaternions]*. Retrieved from https://habr.com/ru/post/436210/ [in Russian].

I. V. Puleko, O. V. Andreev, O. F. Dubina, V. O. Chumakevych, A. S. Palamarchuk

MODEL OF MOTION OF UNMANNED AERIAL VEHICLES BASED ON DUAL QUATERNION ALGEBRA

The widespread use of unmanned aerial vehicles during warfare has intensified the problem of their management, especially when they are used in large groups. One of the main tasks is to ensure coordinated movement of the group's aircraft in space. Optimizing the movement of each device of the group in three-dimensional space is expedient to use mathematical models. The movement of any unmanned aerial vehicle can be presented as a combination of translational and rotational movements, and its speed as a combination of translational and rotational velocities. Previously, these movements were modeled separately using a system of differential equations or quaternions. In this article, a mathematical model of rotational and translational movements of an aircraft based on the algebra of dual quaternions is developed. Dual quaternions consisting of eight scalars are a compact representation of rigid transformations in space. Therefore, their properties determine the advantage in the course of motion simulation, as they reduce the amount of calculations. Thus, with the help of one dual quaternion, it is possible to provide both translational and rotational motions at once, and the operation of non-commutative multiplication of dual quaternions is used to simulate the movement.

The model assumes that the real part of the dual quaternion determines the orientation of the UAV in space, and the dual part determines its position in three-dimensional space. In order to connect aircraft coordinate systems with the model, expressions for the transition from aircraft orientation angles (roll, yaw, and pitch) to dual quaternion parameters and vice versa are obtained.

The functionality of the proposed model was confirmed using the developed software for modeling the coordinated movement of aircraft. The software is adapted for graphical display of a large number of aircraft in web browsers with WebGl support.

Keywords: *motion modeling; rotational and translational movement; unmanned aerial vehicles; quaternions; dual quaternions; algebra of quaternions.*